

DIE WÄRMESTRAHLUNG DER FLAMMEN IN NICHT ISOTHERMEN HOHLRÄUMEN

CESARE CODEGONE

Politecnico von Torino

(Received 5 August 1961)

Zusammenfassung—Der Verfasser behandelt das Problem der Wärmestrahlung der Flammen und des Energieaustausches zwischen diesen und den sie umhüllenden Wandungen in dem Fall, dass diese Wandungen keine gleichmässige Temperatur aufweisen. Er gelangt dabei zu einigen Beziehungen allgemeiner Art, von welchen einige Anwendungen gezeigt werden.

1.

INNERHALB eines kontinuierlichen, isotropen, und in geordnete Bewegung ausführenden Mediums nimmt die Energiegleichung die Form an

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(\rho E \mathbf{w}) + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) - \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\Omega=0}^{2\pi} \operatorname{grad}(b_{\lambda, x}) d\lambda d\Omega - L + Q \quad (1)$$

Sie besagt, dass die Änderung der Energie in der Zeit innerhalb der Zeiteinheit und der Raumeinheit gleich der algebraischen Summe der durch Konvektion und Diffusion (d.h. durch Erneuerung des Mediums) sowie durch Leitung (d.h. durch die eigene Molekülbewegung) eingeführten Energie bzw. der durch Wärmestrahlung verlorenen Energie ist, zuzüglich der örtlich erzeugten (im vorliegenden Fall infolge chemischer Reaktionen) Wärmemenge Q und der Arbeit L der wirkenden Kräfte (die Massenkräfte \mathbf{F} und die Drücke p).

In dieser Gleichung ist ρ die spezifische Masse, E die Energie der Masseneinheit (Summe der Eigenenergie und der kinetischen Energie $w^2/2$), τ ist die Zeit, \mathbf{w} der Geschwindigkeitsvektor, k die Wärmeleitzahl, T die absolute Temperatur,

† D.h. die in der Zeiteinheit und im einheitlichen Intervall der Wellenlänge abgegebene Energie, auf die scheinbare Flächeneinheit sowie auf die Raumwinkel-einheit bezogen.

$b_{\lambda, x}$ die spektrale Strahlungsdichte bei Wellenlänge λ und Temperatur T , † während $d\Omega$ den elementaren Raumwinkel in der allgemeinen Richtung darstellt.

Die Gleichung (1) umfasst als besondere Fälle die Gleichungen der Leitung, der Konvektion und der Strahlung als getrennte Erscheinungen.

Die Arbeit L kann von der Gleichung des dynamischen Gleichgewichtes abgeleitet werden:

$$\rho \frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = \mathbf{F} - \operatorname{grad} p + \mu \left(\frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} + \nabla_2 \mathbf{w} \right) \quad (2)$$

wo μ die dynamische Zähigkeitszahl ist.

Hierbei kann die Rayleighsche Dissipationsfunktion entwickelt werden.

Zu (1) und (2) kommt noch die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{d\rho}{d\tau} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) = 0 \quad (3)$$

die Zustandsgleichung

$$f(p, \rho, T) = 0 \quad (4)$$

und die Gleichung von der chemischen Reaktion, die deren zeitliche Entwicklung und die eventuelle von ihr verursachte Änderung in der Anzahl Moleküle berücksichtigt.

Nach von Kármán [1] kann letztere Gleichung unter der Form:

$$Q = q\epsilon \quad (5)$$

geschrieben werden, wo q die am Ende der Reaktion entwickelte Menge und ϵ ein Indexbeiwert ihrer zeitlichen Progression ist, der daher 0 am Anfang und 1 am Schluss wert ist, und dessen Änderung in vielen Fällen, wo die Änderung der Anzahl Molekülen vernachlässigbar ist, durch folgendes Verhältnis bestimmt wird:

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = K \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n-1} \cdot (1 - \epsilon)^n \cdot \exp(-\alpha\rho/p) \quad (6)$$

Hier ist K eine Konstante, ρ_0 eine Vergleichsdichte, α die sogenannte Aktivierungsenergie; n nimmt oft in Abhängigkeit des Reaktionsmechanismus die Werte 1 bzw. 2 an.

Im allgemeinen ist das durch die Gleichungen (1), (2), (3), (4), (5) und (6) und die Grenzbedingungen dargestellte Problem äusserst komplex.

Bisher hat man sich auf die eindimensionale Betrachtung beschränkt und den Einfluss einiger Erscheinungen insbesondere bei der (1) der Angaben für die Konvektion und die Strahlung vernachlässigt.

Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist die Hervorhebung der Bedeutung der letzteren Angabe, auch in bezug auf den Wärmeaustausch mit den Wandungen.

2.

Seien dS_1 und dS_2 (vgl. Abb. 1) zwei Elemente der Fläche S , die den Raum V begrenzt, wo Strahlungserscheinungen erfolgen. Der diese Elemente verbindende Segment habe eine Länge L und bilde mit den entsprechenden Senkrechten die Winkel β_1 und β_2 .

Der gesamte Energiefluss dF_1 , der auf dS_1 auftrifft, ist gleich der Summe des Strahlungsflusses $(df_V)_1$, der direkt von V ausgesandt wird, und der über V von den übrigen Elementen wie dS_2 entweder direkt durch Emission oder indirekt durch Reflexion ausgesandten Flüsse. Dies lässt sich durch die Fredholmsche Integralgleichung ausdrücken:

$$dF_1 = d(f_V)_1 + \int_S (1 - A_{2,1}) [k_{2,1}(df_e)_2 + k_{2,1}^*(df_r)_2] dS_1 \quad (7)$$

in der $(df_e)_2$ und $(df_r)_2$ den ausgesandten Fluss bzw. den von dS_2 reflektierten Fluss darstellen,

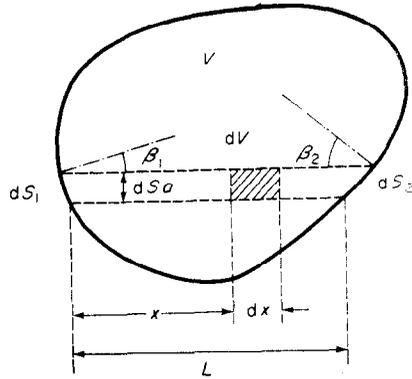


ABB. 1.

$k_{2,1}$ und $k_{2,1}^*$ die nach dS_1 ausgesandten, entsprechenden Bruchteile sind, wovon schliesslich der Bruchteil $A_{2,1}$ von V absorbiert wird.

Stimmt die Ausstrahlungs—mit der Reflexions-Richtungsverteilung überein, so sind sie Ausdrücke $k_{2,1}$ und $k_{2,1}^*$ gleichwertig.

Das trifft insbesondere zu; wenn für beide Erscheinungen das Lambertsche Gesetz gilt, wobei:

$$k_{2,1} = k_{2,1}^* = \frac{\cos \beta_2 d\Omega_2}{\pi dS_1} = \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{\pi L^2} \quad (8)$$

Ist das Element dS_2 grau und stellt r_2 seine Reflexionszahl aus Diffusion dar, so ergibt sich—da es sich um thermische Emission handelt—sogleich:

$$(df_e)_2 = (1 - r_2) \sigma T_2^4 \cdot dS_2 \quad (9)$$

wobei σ der bekannte Stefan-Boltzmannsche Konstante und T_2 die Temperatur von dS_2 ist. Ausserdem:

$$(df_r)_2 = r_2 dF_2 \quad (10)$$

Wenn S in n endliche isotherme Elemente zerlegbar, wobei die Indizes der entsprechenden Grössen zwei beliebiger von solchen Elementen mit p und q bezeichnet werden, so wird zur folgenden Gleichung:

$$F_p = (f_V)_p + \sum_1^n (1 - A_{qp}) k_{qp} (f_q + r_q F_q) \quad (11)$$

Diese besagt, dass der Anteil k_{qp} des von S_q ausgehenden Gesamtflusses (als Summe des direkten Flusses f_q und des indirekten $r_q F_q$)

gegen S_p gerichtet ist, und dass der Bruchteil A_{qp} dieses Anteils durch das Medium absorbiert wird. Die Summation muss auch S_p umfassen, falls diese Hohlstellen aufweist.

Es ergibt sich daraus ein Gleichungssystem ersten Grades in den F , welches gelöst werden kann, wenn die Werte der Flüsse f und der Gestaltungsfaktoren k_{qp} bekannt sind.

Die Berechnung solcher Faktoren, die sich mit der Gleichung

$$k_{qp} = \int_{S_q} \int_{S_p} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 dS_1 dS_2}{\pi L^2} \quad (12)$$

ausdrücken lassen, wurde in vielen Fällen analytisch bzw. graphisch ausgeführt, und zwar in der Photometrie vor allem durch Lambert noch früher, als bei den Forschungen über Wärmestrahlung [2].

3.

Für die Berechnung von $(df_V)_1$ ist das dx lange Element dV des kleinen Zylinders, dessen Basen durch dS_1 und dS_2 gebildet werden in Betracht zu ziehen.

Die von der Basis dS von dV entgegen dS_1 im Abstand $d\lambda$ der Wellenlänge und in der Zeiteinheit ausgestrahlte Energie kann durch

$$b_{\lambda, T} \cdot d\lambda d\Omega dS_a \quad (13)$$

ausgedrückt werden, wo der bereits erwähnte Wert $b_{\lambda, T}$, eine Funktionsgrösse von λ , der absoluten Temperatur T von dV und allgemein auch der Lage von dS ist, wobei dS_a der scheinbare Flächeninhalt von dS in der gewählten Richtung ist. Von dieser Energie wird der Anteil $a_{\lambda, T} \cdot dx$ über der Strecke dx absorbiert, wo $a_{\lambda, T}$ der (Volumen-) Spektral-Absorptionszahl des Mediums im hier betrachteten Element ist. Andererseits kann die von diesem Element mit Rauminhalt dV in der Zeiteinheit ausgesandte Energie auch so ausgedrückt werden:

$$\epsilon_{\lambda, T} \cdot d\lambda d\Omega dV \quad (14)$$

wo sich die Grösse $\epsilon_{\lambda, T}$ im allgemeinen nach der Lage des Punktes ändert und kraft des Kirchhoffschen Gesetzes† mit der Grösse $b_{\lambda, T}^{(p)}$

† Es genügt nämlich sich vorzustellen, dass das Element dS ein integraler Empfänger ist, und dann festzuhalten, dass sich der Austausch zwischen dS und dV , nach dem Carnotschen Prinzip, ausgleicht.

des Planckschen Strahlers durch nachstehende Beziehung verbunden ist:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\lambda, T} &= a_{\lambda, T}^{(v)} \cdot b_{\lambda, T}^{(p)} \\ &= a_{\lambda, T}^{(v)} \cdot c_1 / \{\lambda^5 \cdot [\exp(c_2/\lambda T) - 1]\} \end{aligned} \quad (15)$$

wo c_1 und c_2 bekannte allgemeine Konstanten sind.

Der Ausdruck der Bilanz der längs der in Betracht gezogenen Richtung ausstrahlenden Energie, wird folgendermassen beschrieben, wobei die Indizes λ und T sowie der in beiden Grössen vorkommende Beiwert $d\Omega \cdot d\lambda \cdot dS_a$ der Vereinfachung halber ausgelassen werden:

$$\left(b + \frac{\partial b}{\partial x}\right) dx - b = \epsilon dx - a^{(v)} b \cdot dx \quad (16)$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{\partial b_{\lambda, T}}{\partial x} = a_{\lambda, T}^{(v)} (b_{\lambda, T}^{(p)} - b_{\lambda, T}) \quad (17)$$

Das Problem wird einfacher, wenn sich der stabile Temperaturzustand einstellt und wenn das strahlende Medium auch homogen und isotherm ist. In diesem Fall wird die von dem ganzen Volumen V auf das Element dS_1 der Umhüllung ausgestrahlte Energie df_V durch folgende Beziehung ausgedrückt:

$$\begin{aligned} df_V &= \int_{x=0}^L \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\Omega=0}^{2\pi} \epsilon_{\lambda, T} \cdot \exp(-ax) \cdot dV \cdot d\lambda \cdot d\Omega \\ &= \int_{x=0}^L \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\Omega=0}^{2\pi} a_{\lambda, T}^{(v)} \cdot b_{\lambda, T}^{(p)} \\ &\quad \times \exp(-ax) dS_1 \cos \beta_1 dx d\lambda d\Omega \\ &= dS_1 \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\Omega=0}^{2\pi} \cos \beta_1 \\ &\quad \times [1 - \exp(-aL)] b_{\lambda, T}^{(p)} d\lambda d\Omega \end{aligned} \quad (18)$$

Die Integration in bezug auf λ erfordert das Bekanntsein des Emissionsspektrums, während die Integration in bezug auf Ω rein geometrische Fragen berührt.

Für ein unbegrenztes Medium würde sich ergeben:

$$\left(\frac{df_V}{dS_1}\right)_{\infty} = \int_0^{\infty} \pi b_{\lambda, T}^{(p)} \cdot d\lambda \quad (19)$$

was bedeutet, dass das Medium lediglich nach seinen Emissionslinien so ausstrahlen würde, wie ein Planckscher Strahler.

Demnach können wir schreiben:

$$\left(\frac{df_V}{dS_1}\right)_\infty = A_\infty \sigma T^4 \quad (20)$$

wo A_∞ ein zahlenmässiger Beiwert zwischen 0 und 1 ist, der von der Art und vom Zustand des ausstrahlenden Mediums abhängt, und σ (gleich $5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{K}^4$) die bekannte Stefan-Boltzmannsche Konstante ist.

Z.B. bei 1000°C ist A_∞ für CO_2 0,10, für Wasserdampf 0,46, für SO_2 0,50 ungefähr wert.

Soweit es möglich ist, für das in Betracht kommende Medium einen Mittelwert von $a(V)$ zu wählen, setzt man df_V zweckmässig unter der Form:

$$\frac{df_V}{dS_1} = A_f \cdot A_\infty \sigma T^4 = A_V \sigma T^4 \quad (21)$$

wo:

$$A_f = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [1 - \exp(-aL)] \cos \beta_1 d\Omega_1 \quad (22)$$

ein Formfaktor ist, der von der geometrischen Gestalt des Systems abhängt und ebenfalls zwischen 0 und 1 liegt.

Wäre dS_1 im Mittelpunkt des Grundkreises einer Halbkugel mit Radius R , so ergäbe sich einfach:

$$A_f = 1 - \exp(-aR) \quad (23)$$

Oft bezieht man sich bei der Gleichungsanwendung auf einen Mittelradius R_m , der in elementären Fällen (Kugel, unbegrenzter Zylinder mit kreisförmigem Querschnitt, ebenfalls unbegrenzte, flache Schicht) genau, in sonstigen Fällen durch graphisches Verfahren annähernd berechnet wird.

Z.B. bei $R = 0,6 \text{ m}$ und 1000°C ist A_f für CO_2 0,96, für Wasserdampf 0,80 und für SO_2 0,58 ungefähr wert.

Es ist wichtig zu bemerken, dass dieser Mittelradius gleich (für kleine Werte von aL) oder annähernd gleich wie die „freie Mittelstrecke“ ist, die in den Fragen der Akustik der Saale vorkommt; er hat daher einen Wert $4V/S$ (wo S der Flächeninhalt der V begrenzenden Fläche ist).

Dies kann nachstehender Tafel entnommen werden:

TAFEL

- (a) Kugel, Durchmesser d , $R_m = \frac{2}{3}d$, $(4V/S) = \frac{2}{3}d$.
- (b) Würfel, Seite l (gegenüber dem Mittelpunkt der Grundfläche), $R_m = \frac{2}{3}l$, $(4V/S) = \frac{2}{3}l$.
- (c) rechteckiger Parallelepiped, Seiten l , $2l$, $6l$ (gegenüber dem Mittelpunkt der grössten Grundfläche), $R_m = 1,1l$, $(4V/S) = 1,2l$.
- (d) unbegrenzte, flache Schicht, Höhe h , $R_m = 1,8h$, $(4V/S) = 2h$.
- (e) unbegrenzter Kreiszyylinder, Durchmesser d (gegenüber der Oberfläche), $R_m = d$, $(4V/S) = d$.
- (f) unbegrenzter Halb Kreiszyylinder, Durchmesser d (gegenüber dem Mittelpunkt der Grundfläche), $R_m = 0,9d$, $(4V/S) = d$.

Insbesondere hat Prof. E. Schmidt den Fall eines Kreiszyinders bestimmter Höhe gelöst (3).

Aus dieser Arbeit haben wir:

- (g) Kreiszyylinder, Höhe $h = d/2$ (gegenüber dem Mittelpunkt der Grundfläche)
 $R_m = 1,1h$, $(4V/S) = h$.
Kreiszyylinder, Höhe $h = d$ (gegenüber dem Mittelpunkt der Grundfläche)
 $R_m = 0,73h$, $(4V/S) = \frac{2}{3}h$.
Kreiszyylinder, Höhe $h = 2d$ (gegenüber dem Mittelpunkt der Grundfläche)
 $R_m = 0,40h$, $(4V/S) = 0,40h$.
Kreiszyylinder, Höhe $h = 5d$ (gegenüber dem Mittelpunkt der Grundfläche),
 $R_m = 0,17h$, $(4V/S) = 0,18h$.
Kreiszyylinder, Höhe $h = \infty$ (gegenüber dem Mittelpunkt der Grundfläche),
(s. Fall f).

4.

Wenn an Stelle eines reinen Gases ein Gemisch gegeben ist, können seine n Bestandteile entlang L nach den Strecken x_1, x_2, \dots, x_n als getrennt betrachtet werden, da

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = L \quad (24)$$

$$x_1 = \frac{p_1}{p_t} L; \quad x_2 = \frac{p_2}{p_t} L; \quad \dots \quad x_n = \frac{p_n}{p_t} L \quad (25)$$

wo p_1, p_2, \dots, p_n die Teildrücke sind und p_t der

Gesamtdruck (oft der Atomsphärendruck) des Gemisches ist.

Das zu berechnende Integral wird darum in eine Summe zerlegt, wo die bereits für die reinen Bestandteile in Betracht kommenden Ausdrücke erscheinen. Jedoch müssen die einzelnen Bestandteile in bezug auf die Parameter (apL) statt (aL) und für die gemeinsamen Emissionslinien auf Ausdrücke betrachtet werden die im Vergleich zu den vorerwähnten meistens kleine Korrektionsgrößen darstellen. Z.B. für ein Gemisch mit 10% CO₂-Gehalt und 6% Wasserdampf ausser durchsichtigen Gasen beträgt der Korrektionswert bei $R = 0,6$ m etwa -4%.

5.

Wenn im strahlenden Medium eine gleichmässige Verteilung von haldurchsichtigen Körnchen herrscht, von welchen die Dichte (d.h. ihre Anzahl je Volumeneinheit) mit κ , der mittlere Querschnitt mit S' , das mittlere Volumen mit v' , der (Volumen) Absorptionszahl mit a bezeichnet wird, so zeigt die Wahrscheinlichkeitsrechnung, dass die Strahlungen in einem elementaren, allgemeinen Bündel nur folgenden Bruchteil

$$\varphi = \exp(-\kappa L S') \quad (26)$$

vom Gesamtquerschnitt frei finden, sowie eine wahrscheinliche Korndicke

$$s' = \frac{\kappa L v'}{1 - \varphi} \quad (27)$$

Im Bündel selbst bleibt der Bruchteil φ seines geraden Querschnittes dS_a gegenüber dem vorhergehenden Fall unverändert; die Bestrahlung des Bruchteils $(1 - \varphi)$ erscheint dagegen um den Faktor $\exp(-a's')$ abgeändert.

Es ergibt sich somit:

$$\frac{df_V}{dS_1} = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\Omega=0}^{2\pi} \{1 - \exp(-\Sigma apL)\} \times [\varphi + (1 - \varphi)\exp(-a's')] \cos \beta_1 b_{\lambda, \tau}^{(p)} d\lambda d\Omega \quad (28)$$

Die glühenden Kohlenstoffteilchen in der Hefner-Flamme, die ihr eine eigentümliche Helligkeit verleihen, haben z.B. einen Querschnittsdurchmesser $0,5 \mu$ und einen Inhalt von

ungefähr 10^{14} je m^3 . Ausserdem hat man im Infrarot für solche Teilchen bei $1400^\circ C$ $a' = 0,57 \cdot 10^6 / \lambda^{0,9} = k' / \lambda^{0,9}$.

Der von diesen Teilchen zur direkten Bestrahlung eines Elementes der Flammenoberfläche geleistete Beitrag, wenn angenommen wird, dass sie in einer Halbkugel mit im Element selbst liegenden Mittelpunkt gleichmässig verteilt sind, beträgt:

$$A_c \sigma T^4 = (1 - \varphi) A_c \sigma T^4 = (1 - \varphi) \int_{\lambda=0}^{\infty} [1 - \exp(-a's')] \pi b_{\lambda, \tau}^{(p)} d\lambda \quad (29)$$

Bei $1400^\circ C$ und bei $k's' = 4$ ergibt sich z.B. $A'_c = \sim 0,80$. Es ist einleuchtend, dass

$$(A'_c)_\infty = 1; \quad \varphi_\infty = 0 \quad (30)$$

Bei den Flammen der Industrieöfen mit Kohlenstaubheizung liegt dagegen der Korndurchmesser um $2-10 \mu$, der Inhalt ist der Grössenordnung von 10^{10} je m^3 und bei grösserer Flammendicke kann die entsprechende Dicke ($A'_c = 1$) ohne grossen Fehler als opak und daher integral-ausstrahlend angenommen werden.

Wenn wir mit A_g den den gasförmigen Medien entsprechenden Faktor bezeichnen, so haben wir dann:

$$A_c = 1 - \varphi \quad (31)$$

$$A = \varphi A_g + (1 - \varphi) = 1 - \varphi(1 - A_g) \quad (32)$$

6.

Der direkte Energieaustausch Φ_a in der Zeiteinheit zwischen dem Element dS_1 , das wir bei der Temperatur T_1 als zunächst voll absorbierfähig voraussetzen, und dem Medium V bei der Temperatur T_V (s. Abb. 1) ergibt sich aus der Differenz zwischen der von V emittierten und von dS_1 aufgenommenen Energie einerseits und der von dS_1 emittierten und von V aufgenommenen Energie andererseits (wobei letztere infolge des Reziprozitätsprinzips gleich der Energie ist, die von V emittiert und von dS_1 aufgenommen würde, wenn V die Temperatur T_1 statt der T_V hätte).

Es ergibt sich demnach

$$(d\Phi_a)_{dS_1, v} = \sigma [(A_V)_{T_V} \cdot T_V^4 - (A_V)_{T_1} \cdot T_1^4] dS_1 \quad (33)$$

Wenn dS_1 nicht voll absorbierfähig und r_1 sein

Faktor der diffusen Reflexion ist, so wird nur den Bruchteil $(1 - r_1)$ der strahlenden Energie $d\Phi_u$ aufnehmen, die durch (33) angegeben ist.

7.

Im Falle unvollkommen absorbierender Oberflächen ist der Φ_p Fluss, der insgesamt von irgendeiner Fläche S_p mit dem Medium V und mit den übrigen Flächen ausgetauscht wird, gleich der Differenz zwischen dem aufgenommenen Anteil des von S_p insgesamt empfangenen Flusses F_p und dem von der gleichen Fläche wegen Temperatur emittierten Fluss f_p .

So folgt daraus

$$\Phi_p = F_p(1 - r_p) - f_p \quad (34)$$

wo kraft des Kirchhoffschen Gesetzes

$$f_p = (1 - r_p) \sigma S_p T_p^4 \quad (35)$$

8.

Aus dem allgemeinen Ausdruck (11) folgen einzelne, besondere, erwähnenswerte Fälle.

Sei zum Beispiel ein geschlossener Raum, von zweierlei Wandungen begrenzt, von denen eine S_m mit Belag m verkleidet die Oberflächentemperatur T_m und die andere S_u mit Belag u verkleidet, die Oberflächentemperatur T_u aufweist.

Das Gleichungssystem (11) wird dann so geschrieben:

$$F_u = (f_v)_u + (1 - A_{V,m}) k_m (f_m + r_m F_m) + (1 - A_{V,u}) (1 - k_u) (f_u + r_u F_u) \quad (36)$$

$$F_m = (f_v)_m + (1 - A_{V,m}) (1 - k_m) (f_m + r_m F_m) + (1 - A_{V,u}) k_u (f_u + r_u F_u) \quad (37)$$

wo:

k_m der gegen S_u gerichtete Anteil von f_m , und k_u der gegen S_m gerichtete Anteil f_u ist.

$(1 - k_u)$ ist der Anteil von f_u , der wegen der Konkavität wieder auf S_u zurückfällt, usw. Bei geschlossenen Räumen hat man natürlich für eine und dieselbe Fläche: $\sum_1^n k = 1$.

9.

Viele bekannte Gleichungen lassen sich aus dem System (36) (37) ableiten.

Man kann nämlich folgende besondere Fälle betrachten:

(a) Die Faktoren r seien gleich null bzw. vernachlässigbar (voll absorbierende Wandungen);

(b) die Wandungen u (oder m) seien flach oder konvex. Es fehlt dann der Austausch zwischen den Elementen von u (bzw. von m), und folgt $k_u = 1$ (oder $k_m = 1$);

(c) das Medium V sei nicht absorbierend; dann:

$$(f_v)_u = (f_v)_m = 0; \quad A_{V,m} = A_{V,u} = 0 \quad (38)$$

Andererseits ergibt sich:

$$\Sigma\Phi = 0; \quad \Sigma f = \Sigma(1 - r)F.$$

(d) Man nehme nun an, die Bedingungen (b) und (c) träten zugleich ein. Dann folgt:

$$F_u = k_m (f_m + r_m F_m) \quad (39)$$

$$F_m = (1 - k_m) (f_m + r_m F_m) + (f_u + r_u F_u) \quad (40)$$

Von diesen und von der Gleichung (34) lässt sich dann ableiten:

$$\begin{aligned} \Phi_u &= F_u(1 - r_u) - f_u \\ &= \frac{k_m f_m (1 - r_u) - f_u (1 - r_m)}{(1 - r_m) + k_m r_m (1 - r_u)} \end{aligned} \quad (41)$$

Setzt man in Gleichung (35):

$$\sigma_u = (1 - r_u) \sigma; \quad \sigma_m = (1 - r_m) \sigma$$

so haben wir:

$$\Phi_u = \frac{k_m S_m T_m^4 - S_u T_u^4}{\frac{1}{\sigma_u} + k_m \left(\frac{1}{\sigma_m} - \frac{1}{\sigma} \right)} \quad (42)$$

und kommt man zu der bekannten Formel von Christiansen [4]:

$$\Phi_u = \frac{T_m^4 - T_u^4}{\frac{1}{\sigma_u} + \frac{S_u}{S_m} \left(\frac{1}{\sigma_m} - \frac{1}{\sigma} \right)} S_u \quad (43)$$

weil wenn

$$T_m = T_u; \quad \Phi_u = 0 \text{ und } k_m S_m = S_u.$$

(e) Der Fall eines würfelförmigen Raumes (wobei die k -Werte der einzelnen Seiten 0,2 betragen) mit einer gleichmässig erwärmten Wand und einer, nachbaren, von aussen her ebenfalls gleichmässig abgekühlten Wand, mit nicht absorbierender Atmosphäre ($A_V = 0$

